Extrémy funkcí více proměnných

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a

- lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \leq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r) \cap G$,
- lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \geq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r) \cap G$,
- ostré lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r) \cap G$,
- ostré lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r) \cap G$.

Extrémy funkcí více proměnných

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a

- lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \leq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r) \cap G$,
- lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \geq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r) \cap G$,
- ostré lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r) \cap G$,
- ostré lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r) \cap G$.

Obdobně definujeme (pro $M \subset G$ a $a \in M$):

- lokální extrémy vzhledem k M, pokud daná nerovnost platí pro $x \in U(a, r) \cap M$ ($x \in P(a, r) \cap M$),
- globální extrémy, pokud daná nerovnost platí pro $x \in G$ ($x \in G \setminus \{a\}$),
- globální extrémy vzhledem k množině M, pokud daná nerovnost platí pro $x \in M$ ($x \in M \setminus \{a\}$).

Extrémy funkcí více proměnných

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a

- lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \leq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r)$,
- lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) \geq f(x)$ pro všechna $x \in U(a, r)$,
- ostré lokální minimum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r)$,
- ostré lokální maximum, pokud existuje $r > 0$, že $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \in P(a, r)$.

Obdobně definujeme (pro $M \subset G$ a $a \in M$):

- lokální extrémy vzhledem k M, pokud daná nerovnost platí pro $x \in U(a, r) \cap M$ ($x \in P(a, r) \cap M$),
- globální extrémy, pokud daná nerovnost platí pro $x \in G$ ($x \in G \setminus \{a\}$),
- globální extrémy vzhledem k množině M, pokud daná nerovnost platí pro $x \in M$ ($x \in M \setminus \{a\}$).

Hessova matice

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Hessovu matici funkce f v bodě a definujeme jako

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že Hessova matice (tak jak ji definujeme) je vždy symetrická (protože $f \in C^2$).

Nutná a postačující podmínka

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená,* $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. *Pokud má* f *v bodě* a *lokální extrém a* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *existuje, potom* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Nutná a postačující podmínka

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená,* $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. *Pokud má* f *v bodě* a *lokální extrém a* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *existuje, potom* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená,* $f \in C^2(G)$, $a \in G$. *Nechť navíc* $\nabla f(a) = 0$, *potom:*

- *je-li* $H_f(a)$ *pozitivně definitní, potom má* f *v* a *lokální minimum,*
- *je-li* $H_f(a)$ *negativně definitní, potom má* f *v* a *lokální maximum,*
- *je-li* $H_f(a)$ *indefinitní, potom* f *v* a *nemá lokální extrém (sedlový bod).*

Nutná a postačující podmínka

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém (sedlový bod).*

co ve skutečnosti platí

- $f \in C^2$ a $H_f(a)$ PD $\to$ H_f PD na okolí $a \to$ H_f PSD na okolí $a \to$ f konvexní na okolí $a \to$ kritické body jsou minima

Nutná a postačující podmínka

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $a \in G$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém (sedlový bod).*

co ve skutečnosti platí

- $f \in C^2$ a $H_f(a)$ PD $\to$ H_f PD na okolí $a \to H_f$ PSD na okolí $a \to$ f konvexní na okolí $a \to$ kritické body jsou minima
- $f \in C^2$ a $H_f(a)$ ND $\to$ H_f ND na okolí $a \to H_f$ NSD na okolí $a \to$ f konkávní na okolí $a \to$ kritické body jsou maxima

Připomenutí z lineární algebry

Nechť M je symetrická matice $d \times d$, $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{d1} & \cdots & M_{dd} \end{pmatrix}$.

Označme $D_i = \det \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ii} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, d$.

Připomenutí z lineární algebry

Nechť M je symetrická matice $d \times d$, $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{d1} & \cdots & M_{dd} \end{pmatrix}$.

Označme $D_i = \det \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ii} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, d$. Potom M je

- pozitivně definitní právě, když $D_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$ (alternativně, právě, když jsou všechna vlastní čísla kladná)
- negativně definitní právě, když $(-1)^i D_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$ (alternativně, právě, když jsou všechna vlastní čísla záporná)
- indefinitní, např. pokud $D_d \neq 0$ a neplatí ani jedna z podmínek výše - není ekvivalence (právě, když má alespoň jedno vlastní číslo kladné a alespoň jedno záporné)

Připomenutí z lineární algebry

Nechť M je symetrická matice $d \times d$, $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{d1} & \cdots & M_{dd} \end{pmatrix}$.

Označme $D_i = \det \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ii} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, d$. Potom M je

- pozitivně definitní právě, když $D_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$ (alternativně, právě, když jsou všechna vlastní čísla kladná)
- negativně definitní právě, když $(-1)^i D_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$ (alternativně, právě, když jsou všechna vlastní čísla záporná)
- indefinitní, např. pokud $D_d \neq 0$ a neplatí ani jedna z podmínek výše - není ekvivalence (právě, když má alespoň jedno vlastní číslo kladné a alespoň jedno záporné)

D_d je součin vlastních čísel, tedy pokud pro sudé d platí $D_d < 0$, pak je matice indefinitní (speciálně pro $d = 2$, pokud je matice nenulová na vedlejší diagonále a má nulu na hlavní diagonále, pak je indefinitní).

Šest příkladů

$f(x,y)$	$H_f(x,y)$	typ matice	typ bodu
x^2+y^2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	PD	minimum
$-x^2-y^2$	$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	ND	maximum
x^2-y^2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	IND	sedlový bod
x^4+y^4	$\begin{pmatrix}12x^2 & 0\\ 0 & 12y^2\end{pmatrix}$	PSD na okolí	minimum
$-x^4-y^4$	$\begin{pmatrix}-12x^2 & 0\\ 0 & -12y^2\end{pmatrix}$	NSD na okolí	maximum
x^4-y^4	$\begin{pmatrix}12x^2 & 0\\ 0 & -12y^2\end{pmatrix}$	$f(x,0)=x^4$ $f(0,y)=-y^4$	sedlový bod

Příklady

Vyšetříme lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x, y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Příklady

Vyšetříme lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2.$$

Budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\ -2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Příklady

Vyšetříme lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x, y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2.
\end{aligned}$$

Budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned}
-1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\
-2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první

$$\begin{aligned}
-1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\
6xy + 12y^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Máme

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\ 6xy + 12y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Máme

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\ 6xy + 12y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0 \to A, \\ y(x+2y) &= 0 \to B. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll} B & \to & y = 0 & \stackrel{A}{\to} & -1 + 3x^2 = 0 & \to & x = \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & & & & \to & x = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & \to & x = -2y & \stackrel{A}{\to} & -1 + 3y^2 = 0 & \to & y = \frac{1}{\sqrt{3}} & \to \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ & & & & & \to & y = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \to \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Máme

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0, \\ 6xy + 12y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2 &= 0 \to A, \\ y(x+2y) &= 0 \to B. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll} B & \to & y = 0 & \overset{A}{\to} & -1 + 3x^2 = 0 & \to & x = \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & & & & \to & x = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & \to & x = -2y & \overset{A}{\to} & -1 + 3y^2 = 0 & \to & y = \frac{1}{\sqrt{3}} & \to \quad x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ & & & & & \to & y = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \to \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Stacionární body jsou $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Příklady

Stacionární body jsou $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2.$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+12y & 12x+30y \\ 12x+30y & 30x+84y \end{pmatrix}.$$

Příklady

Stacionární body jsou $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -1 + 3x^2 + 12xy + 15y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 + 6x^2 + 30xy + 42y^2.$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+12y & 12x+30y \\ 12x+30y & 30x+84y \end{pmatrix}.$$

Po dosazení stacionárních bodů dostáváme

$$H_f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 10\sqrt{3} \end{pmatrix},\ D_1 = 2\sqrt{3},\ D_2 = 12 \to \mathrm{PD}$$

$$H_f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -10\sqrt{3} \end{pmatrix},\ D_1 = -2\sqrt{3},\ D_2 = 12 \to \mathrm{ND}$$

$$H_f\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -12\sqrt{3} \end{pmatrix},\ D_2 = -27 \to \mathrm{IND}$$

$$H_f\left(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 12\sqrt{3} \end{pmatrix},\ D_2 = -27 \to \mathrm{IND}.$$

Příklady

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Funkce má jeden bod lokálního minima, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, a jeden bod lokálního maxima, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.
Funkční hodnoty v těchto bodech jsou $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ resp. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Příklady

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x + x^3 - 2y + 6x^2y + 15xy^2 + 14y^3.$$

Funkce má jeden bod lokálního minima, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, a jeden bod lokálního maxima, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.
Funkční hodnoty v těchto bodech jsou $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ resp. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Má funkce globální extrémy?

$$f(x,0) = -x + x^3, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty,$$

f tedy není zdola ani shora omezená (na $\mathbb{R}^2$) a tedy nenabývá ani globálního minima, ani globálního maxima.
Podobně bychom mohli použít i $f(0,y) = 14y^3 - 2y$, nebo $f(x,x) = 36x^3 - 3x$.

Příklady

Vyšetříme lokákní extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Příklady

Vyšetříme lokákní extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 4z^3 - 4z.$$

Nutná posdmínka dává soustavu

$$4x^3 - 4y = 0,$$
$$4y^3 - 4x = 0,$$
$$4z^3 - 4z = 0.$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Nutná posdmínka dává soustavu

$$4x^3 - 4y = 0 \rightarrow A$$
$$4y^3 - 4x = 0 \rightarrow B$$
$$4z^3 - 4z = 0 \rightarrow C.$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Nutná posdmínka dává soustavu

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4y = 0 &\to A \\ 4y^3 - 4x = 0 &\to B \\ 4z^3 - 4z = 0 &\to C. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & y = x^3 & \xrightarrow{B} & x(x^8-1) = 0 & \to & x = 0 & \to & y = 0 \\ & & & & & \to & x = -1 & \to & y = -1 \\ & & & & & \to & x = 1 & \to & y = 1 \\ C & \to & z(z^2-1) = 0 & \to & z = 0 & & & & \\ & & & \to & z = -1 & & & & \\ & & & \to & z = 1 & & & & \end{array}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Nutná posdmínka dává soustavu

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0 \to A \\ 4y^3 - 4x &= 0 \to B \\ 4z^3 - 4z &= 0 \to C. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccc} A & \to & y = x^3 & \xrightarrow{B} & x(x^8-1)=0 & \to & x=0 & \to & y=0 \\ & & & & & \to & x=-1 & \to & y=-1 \\ & & & & & \to & x=1 & \to & y=1 \\ C & \to & z(z^2-1)=0 & \to & z=0 & & & & \\ & & & \to & z=-1 & & & & \\ & & & \to & z=1 & & & & \end{array}$$

Máme tedy stacionární body

$$\begin{aligned} &(-1,-1,-1),\ (-1,-1,0),\ (-1,-1,1), \\ &(0,0,-1),\ (0,0,0),\ (0,0,1), \\ &(1,1,-1),\ (1,1,0),\ (1,1,1). \end{aligned}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Máme stacionární body

$$\begin{aligned} &(-1,-1,-1),\ (-1,-1,0),\ (-1,-1,1),\\ &(0,0,-1),\ (0,0,0),\ (0,0,1), \qquad\qquad .\\ &(1,1,-1),\ (1,1,0),\ (1,1,1). \end{aligned}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Máme stacionární body

$$\begin{array}{l}(-1,-1,-1),\ (-1,-1,0),\ (-1,-1,1),\\ (0,0,-1),\ (0,0,0),\ (0,0,1),\\ (1,1,-1),\ (1,1,0),\ (1,1,1).\end{array}\quad .$$

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 4z^3 - 4z.$$

a tedy Hessova matice je

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Hessova matice je

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pro stacionární body

$$(-1,-1,-1),\ (-1,-1,1),\ (1,1,-1),\ (1,1,1)$$

dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristický polynom je $((12-\lambda)^2 - 16)(8-\lambda)$ a tedy má vlastní čísla $8, 8, 16$ a tedy je pozitivně definitní a jde o body lokálního minima.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Hessova matice je

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pro stacionární body

$$(0,0,-1),\ (0,0,1)$$

dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Její charakteristický polynom je $(\lambda^2 - 16)(8 - \lambda)$ a tedy má vlastní čísla $8, 4, -4$ a tedy je indefinitní a jde o sedlové body.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Hessova matice je

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pro stacionární body

$$(-1,-1,0),\ (1,1,0)$$

dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Její charakteristický polynom je $((12-\lambda)^2 - 16)(-4-\lambda)$ a tedy má vlastní čísla $-4, 8, 16$ a tedy je indefinitní a jde o sedlové body.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Hessova matice je

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 & 0 \\ -4 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pro stacionární bod

$$(0,0,0)$$

dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Její charakteristický polynom je $(\lambda^2 - 16)(-4 - \lambda)$ a tedy má vlastní čísla $-4, -4, 4$ a tedy je indefinitní a jde o sedlový bod.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Funkce má čtyři body lokálního minima, $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ a $(1, 1, 1)$, ve všech má funkční hodnotu -3. Funkce nemá žádný bod lokálního maxima.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Funkce má čtyři body lokálního minima, $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ a $(1, 1, 1)$, ve všech má funkční hodnotu -3. Funkce nemá žádný bod lokálního maxima.

Má funkce globální extrémy?

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Funkce má čtyři body lokálního minima, $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$, ve všech má funkční hodnotu -3. Funkce nemá žádný bod lokálního maxima.

Má funkce globální extrémy?

$f(x,0,0) = x^4$ a tedy f není shora omezená.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Funkce má čtyři body lokálního minima, $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$, ve všech má funkční hodnotu -3. Funkce nemá žádný bod lokálního maxima.

Má funkce globální extrémy?

$f(x,0,0) = x^4$ a tedy f není shora omezená.
Dokážeme: $f(x,y,z) > -3$ pokud $\max(|x|,|y|,|z|) \geq 3$.

Příklady

Vyšetřujeme lokákní extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2.$$

Funkce má čtyři body lokálního minima, $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ a $(1, 1, 1)$, ve všech má funkční hodnotu -3. Funkce nemá žádný bod lokálního maxima.

Má funkce globální extrémy?

$f(x, 0, 0) = x^4$ a tedy f není shora omezená.
Dokážeme: $f(x, y, z) > -3$ pokud $\max(|x|, |y|, |z|) \geq 3$.

Nejdříve si všimneme, že

$$f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2 \geq x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + z^4 - 4z^2$$

Položme $g(t) = t^4 - 4t^2 = (t^2 - 2)^2 - 4$, potom

- $g(t) \geq -4$,
- $g(t) \geq 45$ pokud $|t| \geq 3$ $((t^2 - 2)^2 - 4 \geq (3^2 - 2)^2 - 4 = 45)$

Příklady

Má funkce $f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2$ globální minimum?
Dokážeme: $f(x,y,z) > -3$ pokud $\max(|x|,|y|,|z|) \geq 3$.

Nejdříve si všimneme, že

$$f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2 \geq x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + z^4 - 4z^2$$

Položme $g(t) = t^4 - 4t^2 = (t^2-2)^2 - 4$, potom

- $g(t) \geq -4$,
- $g(t) \geq 45$ pokud $|t| \geq 3$ ($(t^2-2)^2 - 4 \geq (3^2-2)^2 - 4 = 45$)

Nechť $\max(|x|,|y|,|z|) \geq 3$, potom

$$f(x,y,z) \geq x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + z^4 - 4z^2 \geq 45 - 4 - 4 = 37 > -3.$$

Příklady

Má funkce $f(x, y, z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2$ globální minimum?

(A) $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ a $(1, 1, 1)$ jsou body lokálního minima funkce f, ve všech má funkční hodnotu -3.

(B) $f(x, y, z) > -3$ pokud $\max(|x|, |y|, |z|) \geq 3$.

Příklady

Má funkce $f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2$ globální minimum?

(A) $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$ jsou body lokálního minima funkce f, ve všech má funkční hodnotu -3.

(B) $f(x,y,z) > -3$ pokud $\max(|x|,|y|,|z|) \geq 3$.

Navíc platí:

(C) nechť f je spojitá funkce na omezené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^d$, pak f nabývá globálního minima i globálního maxima vzhledem k M.

(D) Je-li x bodem globálního minima funkce f, potom f je bodem lokálního minima f.

Příklady

Má funkce $f(x,y,z) = x^4 - 4xy + y^4 + z^4 - 2z^2$ globální minimum?

(A) $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$ jsou body lokálního minima funkce f, ve všech má funkční hodnotu -3.

(B) $f(x,y,z) > -3$ pokud $\max(|x|,|y|,|z|) \geq 3$.

Navíc platí:

(C) nechť f je spojitá funkce na omezené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^d$, pak f nabývá globálního minima i globálního maxima vzhledem k M.

(D) Je-li x bodem globálního minima funkce f, potom f je bodem lokálního minima f.

Tedy:

- f nabývá globálního minima vzhledem k $[-3,3]^3$ (podle C),
- toto minimum je menší nebo rovno než -3 (podle A) a tudíž to je současně globální minimum f na $\mathbb{R}^3$ (podle B),
- bod(y), kde toto minimum f nabývá musí být zároveň bod(y) lokálního minima (podle D), což jsou $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$ (podle A),
- funkční hodnota ve všech těcho bodech je -3 (podle A) a tedy jsou všechny body globálního minima -3.

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetříme lokální extrémy C^2 funkce z proměnných x a y definované na nějaké otevřené mnozině $U \subset \mathbb{R}^2$, splňujcí rovnici $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$. Předpokládáme navíc, že $3z(x, y) \neq -x$ pro $(x, y) \in U$.

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetříme lokální extrémy C^2 funkce z proměnných x a y definované na nějaké otevřené mnozině $U \subset \mathbb{R}^2$, splňujcí rovnici $F(x,y,z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$. Předpokládáme navíc, že $3z(x,y) \neq -x$ pro $(x,y) \in U$.

Nejprve spočítáme $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + x$ a tedy $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$ právě když $-x \neq 3z^2$.

Na okolí bodů splňující tuto podmínku (tedy na celé U) můžeme pro vyšetřování extrémů použít větu o implicitní funkci.

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetříme lokální extrémy C^2 funkce z proměnných x a y definované na nějaké otevřené mnozině $U \subset \mathbb{R}^2$, splňujcí rovnici $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$. Předpokládáme navíc, že $3z(x, y) \neq -x$ pro $(x, y) \in U$.

Nejprve spočítáme $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + x$ a tedy $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ právě když $-x \neq 3z^2$.

Na okolí bodů splňující tuto podmínku (tedy na celé U) můžeme pro vyšetřování extrémů použít větu o implicitní funkci.

Pro výpočet parciálních derivací z derivujeme rovnici $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

$$3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + z(x, y) + x\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y = 0$$
$$3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + x\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + 2y + x = 0$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetříme lokální extrémy C^2 funkce z proměnných x a y definované na nějaké otevřené mnozině $U \subset \mathbb{R}^2$, splňujcí rovnici $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$. Předpokládáme navíc, že $3z(x, y) \neq -x$ pro $(x, y) \in U$.

Nejprve spočítáme $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + x$ a tedy $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ právě když $-x \neq 3z^2$.

Na okolí bodů splňující tuto podmínku (tedy na celé U) můžeme pro vyšetřování extrémů použít větu o implicitní funkci.

Pro výpočet parciálních derivací z derivujeme rovnici $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

$$3z(x,y)^2 \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + z(x,y) + x \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y = 0$$
$$3z(x,y)^2 \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + x \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 2y + x = 0$$

Hledáme body, kde $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0$, což dává rovnice

$$z(x,y) + y = 0$$
$$2y + x = 0$$
$$z(x,y)^3 + xz(x,y) + y^2 + xy = 0$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Máme rovnice

$$\begin{aligned} z(x, y) + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \\ z(x, y)^3 + xz(x, y) + y^2 + xy &= 0 \end{aligned}$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x,y,z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Máme rovnice

$$\begin{aligned} z(x,y) + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \\ z(x,y)^3 + xz(x,y) + y^2 + xy &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme z první rovnice do posledni

$$2y + x = 0 \to x = -2y$$
$$-y^3 - xy + y^2 + xy = 0 \to y^2(1-y) = 0$$

Dostaneme tedy dvě řešení $(0,0,0)$ a $(-2,1,-1)$, to první ale nesplňuje podmínku $-x \neq 3z^2$.

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x,y,z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Máme rovnice

$$\begin{aligned} z(x,y) + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \\ z(x,y)^3 + xz(x,y) + y^2 + xy &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme z první rovnice do posledni

$$2y + x = 0 \to x = -2y$$
$$-y^3 - xy + y^2 + xy = 0 \to y^2(1-y) = 0$$

Dostaneme tedy dvě řešení $(0,0,0)$ a $(-2,1,-1)$, to první ale nesplňuje podmínku $-x \neq 3z^2$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2,1)$ extrémem (za předpokladu, že $(-2,1) \in U$ a $z(-2,1) = -1$) spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z.

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2, 1, -1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Na to použijeme rovnice

$$3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + z(x,y) + x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y = 0$$

$$3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 2y + x = 0$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2, 1, -1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Na to použijeme rovnice

$$3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + z(x, y) + x\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y = 0$$

$$3z(x, y)^2 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + x\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + 2y + x = 0$$

Ty dávají

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 1 = 0$$

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x,y,z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2,1,-1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Máme

$$
\begin{aligned}
6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0\\
6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + 1 &= 0\\
6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2, 1, -1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Máme

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 1 = 0$$

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Protože $\frac{\partial z}{\partial x}(-2, 1) = \frac{\partial z}{\partial y}(-2, 1) = 0$ a $z(-2, 1) = -1$, máme rovnice

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2, 1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2, 1) = 0$$

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2, 1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -1$$

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2, 1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2, 1, -1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Máme

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) &= 0 \\ 3\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -1 \\ 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 \end{aligned}$$

Bonus - extrémy implicitních funkcí

Vyšetřujeme lokální extrémy funkce z proměnných x a y zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + xz + y^2 + xy = 0$.

Pro zjištění, zda je bod $(-2, 1, -1)$ extrémem spočítáme rovnice určující parciální derivace 2. řádu funkce z. Máme

$$\begin{aligned}
3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) &= 0\\
3\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -1\\
3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,1) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2
\end{aligned}$$

a tedy

$$H_z(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Což je indefinitní matice a $(-2, 1)$ je sedlový bod.

Bonus - extrémy implicitních funkcí